DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKAB
MATEMATISK-FYSISKE MEDDELELSER, BIND XX, NR. 2

ÜBER DAS KOEFFIZIENTENDARSTELLUNGS-PROBLEM DIRICHLETSCHER REIHEN

VON

HARALD BOHR

KØBENHAVN
I KOMMISSION HOS EINAR MUNKSGAARD
1942

Printed in Denmark.
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S.

Einleitung.

In der Theorie der Dirichletschen Reihen $f(s) = f(\sigma + it) = \sum \frac{a_n}{n^s}$, besonders ihre Anwendung auf Probleme der analytischen Zahlentheorie betreffend, spielt bekanntlich die folgende Formel, welche die Summe der Koeffizienten durch die Funktion ausdrückt, eine wichtige Rolle

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{w^s}{s} f(s)\, ds = \sum_{n < w} a_n .$$

Hierbei ist die Gerade $\sigma = \alpha > 0$ im Inneren des Konvergenzbereiches gelegen, und w ist eine beliebige positive Grösse. Sollte diese gerade eine ganze Zahl $w = m$ sein, soll jedoch das entsprechende Reihenglied $\frac{a_m}{m^s}$ fehlen, d. h. $a_m = 0$ sein. (Sonst bedarf die Formel nur einer geringfügigen Modifikation.)

Formal folgt diese Darstellungsformel natürlich aus der bekannten Formel

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{w^s}{s} ds = \begin{cases} 1, & w > 1 \\ 0, & 0 < w < 1 . \end{cases}$$

Die Richtigkeit dieser klassischen Darstellungsformel wurde zuerst von Perron in einer bedeutsamen Arbeit »Zur Theorie der Dirichletschen Reihen«, Crelles Journal 1908, dargetan. Für verschiedene Zwecke ist es bekanntlich bequem, die allgemeinere Darstellungsformel

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{w^s}{s^\varrho} f(s)\, ds = \frac{1}{\Gamma(\varrho)} \sum_{n < w} a_n \left(\log \frac{w}{n}\right)^{\varrho - 1}$$

zur Verfügung zu haben, wo die positive Zahl ϱ nicht gerade gleich 1 ist. Diese Formel folgt ihrerseits formal aus der entsprechenden Relation

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{w^s}{s^\varrho}\,ds = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\varrho)}(\log w)^{\varrho-1}, & w>1 \\ 0, & 0<w<1. \end{cases}$$

Über die Gültigkeit dieser allgemeineren Formel bezüglich der Werte von ϱ besteht aber heute noch ein ungelöstes Problem, das auf PERRON zurückgeht. In seiner oben zitierten Arbeit beweist er, dass die Formel für jedes $\varrho \geqq 1$ gültig ist. Dagegen betont er, dass seine Beweismethode für $0<\varrho<1$ versagt, und dass es daher unentschieden bleibt, ob die Formel für solche Werte von ϱ überhaupt gültig bleibt, d. h. ob auch für solche ϱ die gliedweise Integration der auftretenden unendlichen Reihe gestattet ist.

In der vorliegenden Arbeit, welche mit älteren Untersuchungen des Verfassers in seiner Habilitationsschrift »Bidrag til de Dirichlet'ske Rækkers Teori«, København 1910, eng zusammenhängt, wird die vollständige Lösung des genannten Problems gegeben und zwar wird gezeigt, dass die betreffende Formel für keinen einzigen Wert von ϱ im Intervall $0<\varrho<1$ allgemein gültig ist. Dies geschieht dadurch, dass zu jedem $0<\varrho<1$ eine Dirichletsche Reihe $f(s) = \sum \frac{a_n}{n^s}$ konstruiert wird, für welche die obige Formel nicht gilt. Übrigens wird die Konstruktion eines einzigen Gegenbeispiels geliefert, das für sämtliche ϱ des Intervalls $0<\varrho<1$ verwendbar ist. Hierbei wird es bequem sein, die Nicht-Gültigkeit gerade für $w = 1$ (und also $a_1 = 0$) darzutun, wo die Formel einfach

$$\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{f(s)}{s^\varrho}\,ds = 0$$

heisst.

Vorbereitungen und Angabe des zu beweisenden Satzes.

Im folgenden werden nur Dirichletsche Reihen betrachtet, deren Konvergenzabszisse gleich 0 ist, die also in der ganzen

Halbebene $\sigma > 0$ konvergieren. Wir werden eine Dirichletsche Reihe (mit $a_1 = 0$) konstruieren, für welche es zu jedem $0 < \varrho < 1$ eine positive Abszisse $\alpha = \alpha(\varrho)$ gibt, für welche

$$\int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{f(s)}{s^{\varrho}}\, ds$$

übrigens sogar

$$\int_{\alpha}^{\alpha + i\infty} \frac{f(s)}{s^{\varrho}}\, ds$$

divergiert. Damit wird natürlich die Nicht-Gültigkeit der obigen Formel bewiesen. Der Nachweis der Divergenz des letztgenannten Integrals wird dadurch erbracht, dass bei festem $0 < \varrho < 1$ zwei Abszissen σ_1 und σ_2 mit $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$ angegeben werden, so dass das Integral $\int_{\sigma_1 + iT}^{\sigma_2 + iT} \frac{f(s)}{s^{\varrho}}\, ds$ für gewisse ins Unendliche wachsende Werte von T dem Betrage nach über alle Grenzen wächst. Dies widerspricht nämlich nach dem Cauchyschen Integralsatz, auf das Rechteck σ_1, σ_2, $\sigma_2 + iT$, $\sigma_1 + iT$ angewendet, der Möglichkeit, dass sowohl das Integral $\int_{\sigma_1}^{\sigma_1 + i\infty} \frac{f(s)}{s^{\varrho}}\, ds$ als auch das Integral $\int_{\sigma_2}^{\sigma_2 + i\infty} \frac{f(s)}{s^{\varrho}}\, ds$ beide existieren können, so dass mindestens eine der beiden Abszissen σ_1 und σ_2 als unser $\alpha = \alpha(\varrho)$ verwendet werden kann.

Bei einem solchen Nachweis werden wir offenbar dazu geführt, die Grössenordnung von $f(s)$ für ins Unendliche wachsende t zu untersuchen. Bekanntlich gilt für jede für $\sigma > 0$ konvergente Dirichletsche Reihe $f(s) = \sum \frac{a_n}{n^s}$ bei jedem $0 < \sigma < 1$ für $t \to \infty$ die Abschätzung

$$f(s) = O\left(t^{1 - \sigma + \varepsilon}\right)$$

für beliebiges $\varepsilon > 0$. Zur Vorbereitung der später vorzunehmenden Konstruktion wird es nützlich sein, kurz an die klassische

Herleitung dieser Abschätzung zu erinnern, wobei wir für unsere Zwecke die Voraussetzung ein bischen einschränken, indem wir nicht nur Konvergenz der Reihe für $\sigma > 0$ annehmen, sondern darüber hinaus Beschränktheit der Koeffizientensumme $S_m = \sum_{\nu=1}^{m} a_\nu$ voraussetzen, etwa

$$|S_m| \leqq 1 \quad \text{für alle } m,$$

dafür aber auch eine etwas weitergehende Aussage beweisen können, nämlich

$$f(s) = f(\sigma + it) = O\,(t^{1-\sigma}),$$

wobei ε weggefallen ist. Zur Herleitung dieser Abschätzung stellen wir üblicherweise die Funktion $f(s)$ in der Halbebene $\sigma > 0$ durch die (absolut konvergente) Reihe

$$f(s) = \sum_{m=1}^{\infty} S_m \left(\frac{1}{m^s} - \frac{1}{(m+1)^s} \right)$$

dar, welche durch partielle Summation aus der ursprünglichen Reihe sofort hervorgeht. Aus der Voraussetzung $|S_m| \leqq 1$ für alle m folgt daher in der ganzen Halbebene $\sigma > 0$ die Abschätzung

$$|f(s)| \leqq \sum_{m=1}^{\infty} \left| \frac{1}{m^s} - \frac{1}{(m+1)^s} \right|.$$

Wir werden diese Reihe für $0 < \sigma < 1$ und etwa $t > 1$ abschätzen. Für die auftretende Differenz $\frac{1}{m^s} - \frac{1}{(m+1)^s}$ bieten sich von selbst zwei verschiedenartige Abschätzungen dar, nämlich einerseits

$$\text{(A)} \qquad \left| \frac{1}{m^s} - \frac{1}{(m+1)^s} \right| \leqq \frac{1}{m^\sigma} + \frac{1}{(m+1)^\sigma} < \frac{2}{m^\sigma}$$

und andererseits

$$\left| \frac{1}{m^s} - \frac{1}{(m+1)^s} \right| = \left| s \int_m^{m+1} \frac{du}{u^{1+s}} \right|$$

$$\leqq |s| \int_m^{m+1} \frac{du}{u^{1+\sigma}} < \frac{|s|}{m^{1+\sigma}}$$

also (da $|s|<2t$) die Abschätzung

$$\text{(B)} \qquad \left|\frac{1}{m^s}-\frac{1}{(m+1)^s}\right|<\frac{2t}{m^{1+\sigma}}.$$

Vergleichen wir die beiden Ausdrücke $\frac{2}{m^\sigma}$ und $\frac{2t}{m^{1+\sigma}}$, die für $t=m$ zusammenfallen, so sehen wir sofort, dass der erste der bessere (d. h. kleinere) für $m<t$ und der zweite der bessere für $m>t$ ist. Wir schätzen daher für ein festes σ in $0<\sigma<1$ und $t\to\infty$ folgendermassen ab:

$$\begin{aligned}
|f(s)| &\leqq \sum_{m=1}^{\infty}\left|\frac{1}{m^s}-\frac{1}{(m+1)^s}\right| \\
&\leqq \sum_{m\leqq t}\frac{2}{m^\sigma}+\sum_{m>t}\frac{2t}{m^{1+\sigma}} \\
&= O\left(2\int_1^t\frac{du}{u^\sigma}\right)+O\left(2t\int_t^\infty\frac{du}{u^{1+\sigma}}\right) \\
&= O(t^{1-\sigma}).
\end{aligned}$$

Es wird sich im folgenden darum handeln, eine Dirichletsche Reihe $f(s)=\sum\frac{a_n}{n^s}$ mit der Konvergenzabszisse 0 (und welche im Punkte 0 das obige Verhalten $|S_m|\leqq 1$ aufweist) zu konstruieren, welche grob gesagt auf jeder Geraden $\sigma=\sigma_0$ $(0<\sigma_0<1)$ in gewissen Punkten σ_0+it_ν (wo die Folge der t_ν von σ_0 unabhängig ist) mit $t_\nu\to\infty$ so gross wird, wie nach der obigen Abschätzung überhaupt möglich ist, d. h. für welche

$$|f(\sigma_0+it_\nu)|>ct_\nu^{1-\sigma_0} \qquad (\nu=1,2,\cdots)$$

wird, wo $c=c(\sigma_0)$ eine positive Konstante ist. Überdies müssen wir gewisse Forderungen (z. B. in bezug auf Gleichmässigkeit betreffs der auftretenden Konstanten $c=c(\sigma_0)$) stellen.

Zunächst einige allgemeine Bemerkungen. Wie ein Blick auf die obige Abschätzung lehrt, ist es offenbar nötig, wenn wir erreichen wollen, dass $f(\sigma+it)$ für ein grosses t tatsächlich von der Grössenordnung $t^{1-\sigma}$ ausfallen soll, das Augenmerk auf diejenigen Glieder $S_m\left(\frac{1}{m^s}-\frac{1}{(m+1)^s}\right)$ zu richten, für welche m die Grössenordnung des momentan betrachteten t hat, denn sowohl diejenigen Glieder, für welche m wesentlich kleiner als t ist, etwa $m < t^{1-\delta}$, als auch diejenigen, für welche m wesentlich grösser als t ist, etwa $m > t^{1+\delta}$, geben offenbar zusammen einen Beitrag von kleinerer Grössenordnung als $t^{1-\sigma}$. Bei der Konstruktion haben wir sowohl die Möglichkeit, die Aufmerksamkeit auf diejenigen Glieder zu richten, für welche m in der Nähe von t unterhalb t liegt (und wo wir oben die Abschätzung $\frac{2}{m^\sigma}$ verwendet haben) als auch auf diejenigen Glieder in der Nähe von t, für welche m oberhalb t liegt, (und für welche wir oben die Abschätzung $\frac{2t}{m^{1+\sigma}}$ verwendet haben). Bei der früheren Untersuchung in meiner oben zitierten Arbeit, die einen ähnlichen Zweck verfolgt, habe ich an der betreffenden Stelle die Glieder mit $m > t$ bevorzugt. Es wird aber hier, wo ein etwas weitergehendes Resultat bezüglich der Grössenordnung zu erzielen ist, einfacher sein, umgekehrt die Glieder mit $m < t$ besonders in Auge zu fassen.

Wir werden den folgenden Satz beweisen:

Satz: *Es gibt eine Dirichletsche Reihe* $f(s) = \sum \frac{a_n}{n^s}$ *mit der Konvergenzabszisse* 0, *zu der eine Ordinatenfolge* $t_1 < t_2 < \cdots < t_\nu \to \infty$ *derart existiert, dass es zu jedem Wertepaare* $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$ *eine positive Konstante* $c = c(\sigma_1, \sigma_2)$ *und ein* $N = N(\sigma_1, \sigma_2)$ *gibt, so dass für jedes* $\nu > N$ *auf der ganzen Strecke* $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$, $t = t_\nu$ *der Betrag von* $f(\sigma + it_\nu)$ *grösser als* $ct_\nu^{1-\sigma}$ *ist, während ihr Argument in einem festen Winkelraum kleiner als* π *etwa um die positive Achse gelegen ist.*

Der Beweis dieses Satzes wird im nächsten Paragraphen gegeben werden. Hier soll aber dargetan werden, dass mit diesem Satz tatsächlich das Perronsche Problem gelöst wird und zwar, wie erwähnt, im negativen Sinne. In der Tat, bei fest gegebenem $0 < \varrho < 1$ seien die Abszissen σ_1 und σ_2 so gewählt, dass $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < 1 - \varrho$. Wir betrachten die Funktion $\frac{f(s)}{s^\varrho}$ auf der Strecke $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$, $t = t_\nu$ $(\nu > N)$. Hierbei verhält sich der Nenner $s^\varrho = e^{\varrho \log s}$ für grosse ν dem Betrage nach wie

t_ν^ϱ, während sein Argument (gleichmässig in σ) gegen $\frac{\pi}{2}\varrho$ konvergiert. Daher gilt für die Funktion $\frac{f(s)}{s^\varrho}$ für grosse ν auf der ganzen Strecke $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$, $t = t_\nu$, dass ihr Betrag grösser ist als etwa

$$\frac{ct_\nu^{1-\sigma}}{2\,t_\nu^\varrho} = \frac{c}{2}\,t_\nu^{1-\sigma-\varrho} \geq \frac{c}{2}\,t_\nu^{1-\sigma_2-\varrho},$$

welche letztere Grösse mit ν gegen ∞ strebt wegen $\sigma_2 < 1-\varrho$, während ihr Argument in einem festen Winkelraum kleiner als π gelegen ist, weil dies für das Argument des Zählers gilt, während das Argument des Nenners gegen eine feste Grösse konvergiert. Dies involviert aber offenbar, dass das Integral $\int\limits_{\sigma_1+it_\nu}^{\sigma_2+it_\nu} \frac{f(s)}{s^\varrho}\,ds$ dem Betrage nach mit ν über alle Grenzen wächst, womit, wie oben ausgeführt, die PERRONsche Frage erledigt ist.

Beweis des Satzes durch die Konstruktion eines Beispiels.

Wir wählen eine beliebige, aber feste Folge von positiven Zahlen $t_1 < t_2 < \cdots$ mit $t_\nu \to \infty$, derart dass $\frac{t_{\nu+1}}{t_\nu} \to \infty$. Der Bequemlichkeit halber werden wir die t_ν ganz und sogar durch 12 teilbar annehmen und so, dass schon von Anfang an $\frac{t_{\nu+1}}{4} > \frac{t_\nu}{3}$ ist. Für diese t_ν (und $0 < \sigma < 1$) soll $f(\sigma + i\,t_\nu)$ gross ausfallen. Für ein festes t_ν betrachten wir die obige Differenz

$$\frac{1}{m^{\sigma+it_\nu}} - \frac{1}{(m+1)^{\sigma+it_\nu}}$$

und zwar für Werte von m, die unterhalb t_ν gelegen, aber von der Grössenordnung von t_ν sind, genau gesprochen, für welche

$$\frac{t_\nu}{4} \leq m \leq \frac{t_\nu}{3}$$

ist. Hierbei ist das Argument des ersten Gliedes $-t_\nu \log m$, das des zweiten Gliedes $-t_\nu \log(m+1)$, also (abgesehen vom Vorzeichen) die Änderung des Arguments beim Übergang von $\frac{1}{m^{\sigma + it_\nu}}$ zu $\frac{1}{(m+1)^{\sigma + it_\nu}}$ gleich

$$t_\nu (\log (m+1) - \log m) = t_\nu \log \left(1 + \frac{1}{m}\right).$$

Für grosse m verhält sich diese letztere Grösse wie $\frac{t_\nu}{m}$; genauer gesprochen $\left(\text{wegen } \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{m} < \log \left(1 + \frac{1}{m}\right) < \frac{1}{m} \text{ für } m \geqq 3\right)$ liegt sie für alle in Betracht kommenden Werte von m zwischen $\frac{5}{6} \cdot \frac{t_\nu}{m}$ und $\frac{t_\nu}{m}$, also zwischen $\frac{5}{6} \cdot 3$ und 4 und damit a fortiori zwischen $\pi - \frac{\pi}{3}$ und $\pi + \frac{\pi}{3}$, d. h. in einem festen Winkelraum um π links von der imaginären Achse. Die beiden Glieder $\frac{1}{m^{\sigma + it_\nu}}$ und $\frac{1}{(m+1)^{\sigma + it_\nu}}$ sind somit »im wesentlichen« entgegengesetzt gerichtet. Für den absoluten Betrag der Differenz $\frac{1}{m^{\sigma + it_\nu}} - \frac{1}{(m+1)^{\sigma + it_\nu}}$ gilt somit offenbar

$$\left| \frac{1}{m^{\sigma + it_\nu}} - \frac{1}{(m+1)^{\sigma + it_\nu}} \right| > \left| \frac{1}{m^{\sigma + it_\nu}} \right| = \frac{1}{m^\sigma},$$

während das Argument der Differenz in einem festen Winkelraum von $-\frac{\pi}{3}$ bis $+\frac{\pi}{3}$ um das Argument des ersten Gliedes $\frac{1}{m^{\sigma + it_\nu}}$ liegt.

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir nunmehr zur direkten Angabe der gewünschten Funktion $f(s) = \sum \frac{a_n}{n^s}$ über. Statt den Koeffizienten a_n selbst anzugeben, ziehen wir vor, die Koeffizientensumme $S_m = \sum_1^m a_n$ vorzuschreiben. Wir wählen bei jedem $\nu = 1, 2, \cdots$

$$S_m = m^{it_\nu} \quad \text{für } \frac{t_\nu}{4} \leqq m \leqq \frac{t_\nu}{3} (\nu = 1, 2, \cdots)$$

$$S_m = 0 \qquad \text{für alle } m \text{ ausserhalb dieser Intervalle.}$$

Da $|S_m| \leqq 1$ für alle m, ohne dass S_m für $m \to \infty$ einem Grenzwert zustrebt, so dass die Reihe $\sum a_n = \sum \frac{a_n}{n^0}$ zwischen endlichen Grenzen oscilliert, muss der Punkt 0 auf der Konvergenzgeraden liegen, d. h. die Konvergenzabszisse gleich 0 sein. Auf der Strecke $0 < \sigma < 1$, $t = t_\nu$ erhalten wir dann

$$f(\sigma + it_\nu) = \sum_{m=\frac{t_\nu}{4}}^{\frac{t_\nu}{3}} m^{it_\nu} \left(\frac{1}{m^{\sigma + it_\nu}} - \frac{1}{(m+1)^{\sigma + it_\nu}}\right) + R_\nu(s),$$

wobei

$$R_\nu(s) = \sum_{m=1}^{\frac{t_\nu - 1}{3}} S_m \left(\frac{1}{m^{\sigma + it_\nu}} - \frac{1}{(m+1)^{\sigma + it_\nu}}\right) +$$

$$+ \sum_{m=\frac{t_\nu + 1}{4}}^{\infty} S_m \left(\frac{1}{m^{\sigma + it_\nu}} - \frac{1}{(m+1)^{\sigma + it_\nu}}\right).$$

In der Summe erstreckt von $\frac{t_\nu}{4}$ bis $\frac{t_\nu}{3}$ ist nach dem obigen und der getroffenen Wahl von $S_m = m^{it_\nu}$ (d. h. S_m hat den absoluten Betrag 1 und sein Argument ist gleich dem Argument von $\frac{1}{m^{\sigma + it_\nu}}$ mit entgegengesetztem Vorzeichen) jedes Glied $\frac{1}{m^{\sigma + it_\nu}} - \frac{1}{(m+1)^{\sigma + it_\nu}}$ dem Betrage nach grösser als $\frac{1}{m^\sigma}$ und fällt in einen Winkelraum $\left(-\frac{\pi}{3}, +\frac{\pi}{3}\right)$ um die positive Halbachse. Somit gilt für diese Summe, dass ihr Realteil und damit a fortiori ihr absoluter Betrag grösser ist als

$$\cos\frac{\pi}{3} \cdot \sum_{m=\frac{t_\nu}{4}}^{\frac{t_\nu}{3}} \frac{1}{m^\sigma} > \frac{1}{2} \int_{\frac{t_\nu}{4}}^{\frac{t_\nu}{3}} \frac{du}{u^\sigma} = c(\sigma)\, t_\nu^{1-\sigma},$$

wo die positive Konstante $c(\sigma)$ nicht von t_ν abhängt und in jedem festen Intervall $0 < \sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2 < 1$ grösser als eine feste Konstante $c = c(\sigma_1, \sigma_2)$ bleibt. Ferner ist das Argument dieser Summe gleichfalls in dem betrachteten festen Winkelraum $\left(-\frac{\pi}{3}, +\frac{\pi}{3}\right)$ gelegen. Wir haben nunmehr das Restglied $R_\nu(s)$ abzuschätzen. Dies ist aber mit wenigen Worten getan. Nach den Abschätzungen (A) und (B) haben wir

$$|R_\nu(s)| < \sum_{m=1}^{\frac{t_\nu - 1}{3}} \frac{2}{m^\sigma} + \sum_{m=\frac{t_\nu+1}{4}}^{\infty} \frac{2\,t_\nu}{m^{\sigma+1}},$$

also für $\nu \to \infty$

$$R_\nu(s) = O\left(2\int_1^{\frac{t_\nu-1}{3}} \frac{du}{u^\sigma}\right) + O\left(2\,t_\nu \int_{\frac{t_\nu+1}{4}}^{\infty} \frac{du}{u^{1+\sigma}}\right)$$

$$= O\left(t_{\nu-1}^{1-\sigma}\right) + O\left(t_\nu \cdot t_{\nu+1}^{-\sigma}\right) = o\left(t_\nu^{1-\sigma}\right),$$

und zwar gilt diese Abschätzung gleichmässig in jedem festen Intervall $0 < \sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2 < 1$. Schliesslich ergibt sich also für $\nu \to \infty$ in jedem festen Intervall $0 < \sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2 < 1$ die Ungleichung

$$|f(\sigma + i\,t_\nu)| > c\,t_\nu^{1-\sigma} + o\left(t_\nu^{1-\sigma}\right).$$

Hieraus ist aber ersichtlich, dass $f(\sigma + it_\nu)$ für hinreichend grosse ν auf der Strecke $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$ absolut genommen grösser als $\frac{c}{2} t_\nu^{1-\sigma}$ ist, und ferner ist klar, dass ihr Argument in einem festen Winkelraum, etwa $\left(-\frac{2}{5}\pi, +\frac{2}{5}\pi\right)$, von einer Öffnung kleiner als π liegt. Hiermit ist der Satz bewiesen.

Indleveret til Selskabet den 25. Februar 1942.
Færdig fra Trykkeriet den 6. Maj 1942.